МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФОРМАЦИИ ВСЕХ ГРУПП С K-$\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.С. Вегера

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON LOCAL PROPERTIES OF THE FORMATIONS OF GROUPS WITH K-$\mathfrak{F}$-SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

A.S. Vegera

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Рассматривается класс всех конечных групп, силовские подгруппы которых являются K-$\mathfrak{F}$-субнормальными. Исследуется условие его насыщенности, а также устанавливается локальный экран в разрешимом случае.

Ключевые слова: *конечная группа, силовская подгруппа,* K-$\mathfrak{F}$-*субнормальная подгруппа, насыщенная формация, локальная формация.*

The class of all finite groups with Sylow K-$\mathfrak{F}$-subnormal subgroups is considered. The condition of saturation of this class is investigated, as well as the local screen in solvable case is established.

Keywords: *finite group, Sylow subgroup,* K-$\mathfrak{F}$-*subnormal subgroup, saturated formation, local formation.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа является субнормальной в G. В 1969 году Т. Хоукс [1] обобщил понятие субнормальности, введя определение $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы в разрешимой группе. В 1978 году Л.А. Шеметков в монографии [2] распространил понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы на произвольные конечные группы. Понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы активно изучалось в различных направлениях и нашло многочисленные приложения [3]. В 1978 году О. Кегель [4] ввел понятие $\mathfrak{F}$-достижимой (K-$\mathfrak{F}$-субнормальной, согласно [3]) подгруппы.

В работе [5] А.Ф. Васильевым было начато рассмотрение следующей задачи. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Что можно сказать о структуре группы G, если все ее силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в G? В статье [6] А.Ф. Васильевым и Т.И. Васильевой был введен и исследован класс $w\mathfrak{F}$ всех групп, силовские подгруппы которых являются $\mathfrak{F}$-субнормальными.

В работе [7] изучались свойства класса $\overline{w}\mathfrak{F}$ всех групп, у которых силовские подгруппы являются K-$\mathfrak{F}$-субнормальными. В частности, в классе разрешимых групп было установлено, что если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то и класс $\overline{w}\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией.

В настоящей работе продолжено исследование свойств класса $\overline{w}\mathfrak{F}$ для непустой формации $\mathfrak{F}$. В частности, доказана насыщенность формации $\overline{w}\mathfrak{F}$ в общем случае (без ограничения разрешимости). Кроме того, найдено локальное задание формации $\overline{w}\mathfrak{F}$ в разрешимом случае.

1 Предварительные результаты

В работе используются стандартные обозначения, определения и результаты. Необходимые сведения из теории групп и их формаций можно найти в монографиях [2], [3], [9].

Напомним, что $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел; $\mathfrak{G}$ – это класс всех групп; $\mathfrak{G}_\pi$ – класс всех π-групп, где π – некоторое множество простых чисел ($\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_\pi$ для $\pi = \{p\}$); $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп; $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если он является замкнутым относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если она является насыщенным классом, т. е. если из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \le \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

***Определение* 1.1** [3, с. 236]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G (записывается $H\ \mathfrak{F}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < ... < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1,...,n$.*

***Определение* 1.2** [3, с. 236]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальной в G (записывается H K-$\mathfrak{F}$-sn G), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \lhd H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1,...,n$.*

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы *G*. Подгруппа *H* группы *G* называется *π-подгруппой*, если $\pi(H)$ содержится в некотором множестве π простых чисел.

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная *p*-подгруппа группы G, где $p \in \mathbb{P}$.

$O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π-подгруппа группы G, где $\pi \subseteq \mathbb{P}$.

$\mathrm{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских *p*-подгрупп группы G для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Тогда $\mathrm{Syl}(G) = \bigcup_{\forall p \in \pi(G)} \mathrm{Syl}_p(G)$ – это множество всех силовских подгрупп группы *G*.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс групп. Тогда будем обозначать $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{\forall G \in \mathfrak{X}} \pi(G)$.

***Определение* 1.3** [9, с. 16]. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ – класс групп, $\mathfrak{F}_2$ – формация. Корадикальным произведением $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ называется класс*

$$\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1).$$

***Определение* 1.4** [3, с. 95]. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – формации. Тогда $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = (\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2) \cap (\mathfrak{F}_2 \circ \mathfrak{F}_1)$ называется прямым произведением формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$.*

Функция $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Через $LF(f)$ обозначим класс всех групп, у которых для любого главного фактора H/K группы G и для каждого простого числа p, делящего $|H/K|$, выполняется $G/C_G(H/K) \in f(p)$. Формация называется локальной, если существует локальный экран *f* такой, что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Экран *f* формации $\mathfrak{F}$ называется внутренним, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Внутренний экран *f* формации $\mathfrak{F}$ называется максимальным внутренним, если для любого ее внутреннего экрана *h* имеет место включение $h(p) \subseteq f(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

В работе [6] исследован класс групп $w\mathfrak{F}$, определяемый следующим образом.

***Определение* 1.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Класс групп $w\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\forall H \in \mathrm{Syl}(G) : H\ \mathfrak{F}$-sn $G)$.*

В дальнейшем будем использовать следующие свойства класса $w\mathfrak{F}$.

***Лемма* 1.6** [6, лемма 1.4]. *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $w\mathfrak{F}$ – наследственная формация.*

***Теорема* 1.7** [6, теорема B]. *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то $w\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.*

В работе [7] изучается следующий класс групп.

***Определение* 1.8.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Класс групп*

$$\overline{w}\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid \forall H \in \mathrm{Syl}(G) : H \text{ K-}\mathfrak{F}\text{-sn } G).$$

***Лемма* 1.9** [7, лемма 11]. *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $\overline{w}\mathfrak{F}$ – наследственная формация.*

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие результаты.

***Теорема* 1.10** [3, с. 95]. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – формации и $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) = \varnothing$. Обозначим $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi_1$ и $\pi(\mathfrak{F}_2) = \pi_2$. Тогда*

$$\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G = O_{\pi_1}(G) \times O_{\pi_2}(G),$$

где $O_{\pi_1}(G) \in \mathfrak{F}_1$ и $O_{\pi_2}(G) \in \mathfrak{F}_2$) – формация. Более того, если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – наследственные насыщенные формации, то $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ – также наследственная насыщенная формация.

***Лемма* 1.11** [10, лемма 2.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, H K-$\mathfrak{F}$-sn G, p – простое число и $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $O_p(H) \leq O_p(G)$.*

***Лемма* 1.12** [10, лемма 2.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа $G = HA$, где H – $\pi(\mathfrak{F})$-подгруппа, A – $\pi(\mathfrak{F})'$-подгруппа и H K-$\mathfrak{F}$-sn G. Тогда $H \lhd G$.*

***Теорема* 1.13** [11, лемма 3.1.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Если подгруппа H* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальна* в *G*, *то $H \cap M$* K-$\mathfrak{F}$*-субнормальна в M для любой $M \leq G$.*

***Лемма* 1.14** [11, лемма 3.1.9]. *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, $H \leq G \in \mathfrak{F}$ и все композиционные факторы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, то $H\ \mathfrak{F}$-sn G тогда и только тогда, когда H K-$\mathfrak{F}$-sn G.*

***Лемма* 1.15** [9, лемма 4.13]. *Пусть G – группа. Если $N \lhd G$, N и G/N – разрешимы, то G разрешима.*

***Лемма* 1.16** [2, лемма 4.5]. *Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и* *только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G / F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран. Обозначим через h^* – локальный экран такой, что $h^*(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \forall H \in \mathrm{Syl}(G) \ : \ H \in h(p))$ для любого простого p.

***Теорема* 1.17** [6, теорема D]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная формация, h – ее максимальный внутренний локальный экран, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Тогда $w\mathfrak{F} = LF(h^*)$, где h^* – максимальный внутренний локальный экран формации $w\mathfrak{F}$.*

***Лемма* 1.18** [2, теорема 3.3]. *Локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f, причем f удовлетворяет следующему условию: $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p.*

***Лемма* 1.19** [2, лемма 3.9]. *Если H / K – главный фактор группы G и $p \in \pi(H / K)$, то $G / C_G(H / K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \le C_G(H / K)$.*

2 Насыщенность формации $\overline{w}\mathfrak{F}$

***Лемма* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, группа $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда каждый композиционный фактор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Рассмотрим композиционный ряд $1 = A_0 \lhd A_1 \lhd ... \lhd A_n = G$. Тогда фактор A_i / A_{i-1} является простой группой для любого $i = 1,...,n$. Обозначим произвольный фактор A_i / A_{i-1} через H. Из леммы 1.9 следует, что $A_i \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Так как $\overline{w}\mathfrak{F}$ – гомоморф, то $H \simeq A_i / A_{i-1} \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Пусть $P \in \mathrm{Syl}(H)$. Если $P = H$, то $|H| = p^{\alpha}$, где $p \in \mathbb{P}$. Так как H – простая группа, то $|H| = p$. По условию $\pi(H) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому, $H \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь $P \ne H$. Так как подгруппа P K-$\mathfrak{F}$-sn H и H – простая неабелева группа, то существует цепь $P = P_0 \le ... \le P_{k-1} < P_k = H$ и $P_k^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}} \le P_{k-1}$. Так как $H^{\mathfrak{F}} \lhd H$, то $H^{\mathfrak{F}} = 1$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. □

Следующая теорема устанавливает связь между классами $\overline{w}\mathfrak{F}$ и $w\mathfrak{F}$.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Тогда $\overline{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$.*

Доказательство. Докажем, что для любой группы $G \in \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$. Тогда существуют такие подгруппы $A \in \mathfrak{N}_{\pi'}$ и $B \in w\mathfrak{F}$ в G, что $G = A \times B$. Рассмотрим произвольную силовскую подгруппу $P \le G$. Возможны два случая. Пусть $P \le A$. Так как A – нильпотентная группа, то $P \lhd A$. Тогда имеем цепь подгрупп $P \lhd A \lhd G$. Следовательно, по определению, P K-$\mathfrak{F}$-sn G. Рассмотрим второй случай. Пусть $P \le B$. Так как $B \in w\mathfrak{F}$, то P $\mathfrak{F}$-sn B. Из $B \lhd G$, следует P K-$\mathfrak{F}$-sn G. Поэтому произвольная силовская подгруппа P K-$\mathfrak{F}$-sn G. Таким образом, $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$.

Докажем теперь, что для любой группы $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$ выполняется $G \in \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$. Согласно теореме 1.10, необходимо доказать, что группа G представима в виде $G = O_{\pi'}(G) \times O_{\pi}(G)$, где $O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{N}_{\pi'}$ и $O_{\pi}(G) \in w\mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Пусть n – число всех силовских p-подгрупп группы G, где $p \in \pi'$. Рассмотрим P_i – произвольную силовскую p_i-подгруппу группы G, где $p_i \in \pi'$ и $i = 1,...,n$. Тогда по лемме 1.11 подгруппа $P_i = O_{p_i}(P_i) \subseteq O_{p_i}(G)$. При этом порядок $|O_{p_i}(G)| \le |P_i|$, поэтому $P_i = O_{p_i}(G)$. Следовательно, $P_i \lhd G$. Рассмотрим произведение $A = P_1 P_2 ... P_n$. Ясно, что A является нормальной нильпотентной подгруппой группы G. Так как $|A|$ и $|G : A|$ взаимно просты, то A – π'-холлова подгруппа группы G. Следовательно, $A = O_{\pi'}(G)$ и $A \in \mathfrak{N}_{\pi'}$.

По теореме Шура-Цассенхауза [8] подгруппа A имеет дополнение в G, то есть существует подгруппа B порядка $|G : A|$ такая, что $G = AB$ и $A \cap B = 1$. Пусть H – силовская подгруппа из B. Рассмотрим подгруппу HA. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и H K-$\mathfrak{F}$-sn G, то по лемме 1.13 подгруппа $HA \cap H = H$ является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в HA. По лемме 1.12 подгруппа $H \lhd HA$. Тогда $A \subseteq N_G(H)$. Обозначим через m – число всех силовских p-подгрупп группы G, где $p \in \pi(B)$. Так как любая подгруппа порождается своими силовскими подгруппами, то $B = \langle H_1, H_2, ..., H_m \rangle$, где $H_i \in \mathrm{Syl}(B)$ и $i = 1,...,m$. При этом $A \subseteq N_G(H_i)$ для любого $i = 1,...,m$, то есть для любых $a \in A$ и $h_i \in H_i$ следует, что $h_i^a \in H_i$. Рассмотрим произвольный элемент $h_1 h_2 ... h_m$ из группы B. Тогда $(h_1 h_2 ... h_m)^a = h_1^a h_2^a ... h_m^a \in \langle H_1 H_2 ... H_m \rangle$. Следовательно, $A \subseteq N_G(B)$. Таким образом, $N_G(B) = G$. Тогда $B \lhd G$. Так как $|B|$ и $|G : B|$ взаимно просты, то B – π-холлова подгруппа в G. Следовательно, $B = O_{\pi}(G)$. Итак, $G = A \times B = O_{\pi'}(G) \times O_{\pi}(G)$.

Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то согласно лемме 1.9 класс $\overline{w}\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Значит, $B \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Тогда из леммы 2.1 следует, что каждый композиционный фактор B принадлежит $\mathfrak{F}$. Пусть S – произвольная силовская подгруппа из B. Так как S K-$\mathfrak{F}$-sn B, то по лемме 1.14 подгруппа S $\mathfrak{F}$-sn B. Тогда $B \in w\mathfrak{F}$.

Итак, $\overline{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$. □

***Следствие* 2.3.** *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то $\overline{w}\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.*

Доказательство. Согласно лемме 1.9 класс групп $\overline{w}\mathfrak{F}$ является наследственной формацией. По теореме 2.2 класс групп $\overline{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$. Заметим, что $\mathfrak{N}_{\pi'}$ – насыщенная формация. И $w\mathfrak{F}$ – насыщенная формация согласно теореме 1.7. Тогда по теореме 1.10 прямое произведение двух насыщенных формаций также является насыщенной формацией. □

3 Локальный экран формации $\overline{w}\mathfrak{F}$

Для дальнейших рассуждений сформулируем и докажем две следующие леммы.

***Лемма* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация. Если в группе $G \in \mathfrak{G}$ существует разрешимая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, то G – разрешимая группа.*

Доказательство. Пусть H – разрешимая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа некоторой группы G. Тогда существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < ... < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ $(i = 1,...,n)$. Так как $H_1^{\mathfrak{F}} \leq H_0$ и H_0 разрешима, то $H_1^{\mathfrak{F}}$ – разрешимая подгруппа. Так как фактор-группа $H_1 / H_1^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и по условию $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$, то $H_1 / H_1^{\mathfrak{F}}$ – разрешимая группа. Следовательно, по лемме 1.15 группа H_1 разрешима. Аналогично для любого i получаем, что из $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ следует разрешимость $H_i^{\mathfrak{F}}$ и $H_i / H_i^{\mathfrak{F}}$ и, следовательно, разрешимость группы H_i (где $i = 2,...,n$). Таким образом, $H_n = G$ – разрешимая группа. □

***Лемма* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация. Тогда $w\mathfrak{F}$ и $\overline{w}\mathfrak{F}$ – разрешимые формации.*

Доказательство. Пусть $G \in w\mathfrak{F}$. Так как любая силовская подгруппа группы G разрешима и $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то согласно лемме 3.1 группа G разрешима. Следовательно, $w\mathfrak{F}$ – разрешимая формация.

Пусть теперь $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$. По теореме 2.2 группа $G \in \mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F}$. Так как формации $\mathfrak{N}_{\pi'}$ и $w\mathfrak{F}$ разрешимы, то группа G разрешима. □

***Лемма* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{F}_i$ – формация и f_i – ее локальный экран, где $i = 1,2$. Если $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда по лемме 1.16 фактор-группа $G / F_p(G) \in f_1(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Так как по условию $f_1(p) \subseteq f_2(p)$, то $G / F_p(G) \in f_2(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Тогда по лемме 1.16 группа $G \in \mathfrak{F}_2$. □

***Лемма* 3.4.** *Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$ – локальная формация, где f – ее разрешимый локальный экран. Тогда $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация.*

Доказательство. Осуществляется проверкой соответствующих определений. □

Согласно теореме Гашюца – Любезедер – Шмида любая насыщенная формация является локальной, и наоборот. Поэтому в силу следствия 2.3 возникает задача о нахождении локального задания формации $\overline{w}\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран, который существует и единственен по теореме 1.18. Обозначим через h^* – локальный экран такой, что $h^*(p) = (G \in \mathfrak{G} \mid \forall H \in \mathrm{Syl}(G) : H \in h(p)$ и H K-$\mathfrak{F}$-sn $G)$ для любого простого p. Следующая теорема устанавливает локальный экран $\overline{w}\mathfrak{F}$ для разрешимой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

***Теорема* 3.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная формация, h – ее максимальный внутренний локальный экран, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$. Тогда $\overline{w}\mathfrak{F} = LF(f)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\overline{w}\mathfrak{F}$ такой, что*

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi'; \\ \mathfrak{N}_p h^*(p) \cap \mathfrak{S}_\pi, & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{X} = LF(f)$. Покажем, что $\overline{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$. Вначале докажем, что $\overline{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.

Напомним, что $\mathfrak{N}_{\pi'} = LF(f_1)$, где

$$f_1(p) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi', \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

По теореме 1.17 $w\mathfrak{F} = LF(f_2)$, где

$$f_2(p) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } p \in \pi' \\ \mathfrak{N}_p h^*(p) \cap \mathfrak{S}_\pi, & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

Так как $f_1(p) \subseteq f(p)$ и $f_2(p) \subseteq f(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, то по лемме 3.3 следует, что $\mathfrak{N}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{X}$ и $w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. А так как любая формация-замкнута относительно прямых произведений, то $\mathfrak{N}_{\pi'} \times w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда по теореме 2.2 формация $\overline{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{X} \subseteq \overline{w}\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \overline{w}\mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \setminus \overline{w}\mathfrak{F}$. Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Предположим обратное. Тогда $|G/\Phi(G)| < |G|$. Таким образом, $G/\Phi(G) \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Так как $\overline{w}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $\Phi(G) = 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что существует минимальная нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \neq N$. Тогда $|G/N| < |G|$ и $|G/K| < |G|$. Следовательно, $G/N \in \overline{w}\mathfrak{F}$ и $G/K \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Ясно, что $N \cap K = 1$. Так как $\mathfrak{X}$ – формация, то $G/(N \cap K) \simeq G \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G/N \in \overline{w}\mathfrak{F}$.

Так как $G \in \mathfrak{X}$, то по лемме 3.4 группа G разрешима. Тогда N является элементарной абелевой p-группой. В этом случае $G = NM$, где M – максимальная подгруппа G и $N \cap M = 1$. Ясно, что $N \leq C_G(N)$. Предположим, что $N < C_G(N)$. Так как $C_G(N)M = G$, то $C_G(N) \cap M \neq 1$. Тогда $D = C_G(N) \cap M \lhd M$. Так как $G = NM$, то рассмотрим произвольный элемент $g = nm$ группы G, где $n \in N$, $m \in M$. Очевидно $D^n = D^m = D^g = D$. Следовательно, $D \lhd G$. Но при этом, $N \cap D = 1$. Получили противоречие, так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Следовательно, $N = C_G(N)$.

Пусть N – π'-группа. Так как $G \in \mathfrak{X} = LF(f)$, то $G/C_G(N) \in f(p) = \mathfrak{N}_p$, где $p \in \pi'$. Согласно лемме 1.19 фактор-группа $G/C_G(N)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп. Следовательно, $G/C_G(N) \simeq 1$. То есть, $G = C_G(N) = N$. Так как группа $N = G$ – элементарная абелева p-группа, где $p \in \pi'$, то $G \in \mathfrak{N}_{\pi'}$. Согласно теореме 2.2 группа $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$.

Пусть N – π-группа. Так как $G \in \mathfrak{X} = LF(f)$, то $G/C_G(N) = G/N \in f(p) = \mathfrak{N}_p h^*(p) \cap \mathfrak{S}_\pi$, где $p \in \pi$. По лемме 1.19 $G/N \in h^*(p) \cap \mathfrak{S}_\pi$. Тогда любая силовская подгруппа из G/N является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной. Так как

$$G/N \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

то по лемме 1.14 следует, что любая силовская подгруппа из G/N является $\mathfrak{F}$-субнормальной. Следовательно, $G/N \in w\mathfrak{F}$. С другой стороны, $G/C_G(N) = G/N \in h^*(p)$. Отсюда $G \in w\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 2.2 группа $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$.

Таким образом, доказано, что $G \in \overline{w}\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Значит, $\mathfrak{X} \subseteq \overline{w}\mathfrak{F}$.

Итак, $\overline{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$.

Заметим, что по построению локальный экран f является максимальным внутренним. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hawkes*, *T.* On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 44. – P. 243–250.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

3. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.

4. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

6. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

7. *Вегера*, *А.С.* О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп / А.С. Вегера // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 154–158.

8. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

9. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.

10. *Мурашко*, *В.И.* О классе конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 55–61.

11. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн. : Бел. навука, 2003. – 254 с.

Поступила в редакцию 30.05.14.